Concours Communs Marocain - Session 2009

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Une équation aux dérivées partielles. Théorème de Weierstrass

Corrigé par M.TARQI

EXERCICE

1. (a) La fonction $f : (x,y) \longmapsto \frac{y}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc $g = \varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
   On calcule
   $$\frac{\partial g}{\partial x} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial f}{\partial x} = -\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}$$
   $$\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}$$
   (b)
   $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^4} + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^3}$$
   $$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2$$
2. L'équation différentielle (1) s'écrit encore sous la forme $((1+t^2)x')' = t$, donc $(1+t^2)x' = \frac{1}{2}t^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$. Donc $x'(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2} + \frac{c}{1+t^2}$. Donc les solutions de (1) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x(t) = \frac{1}{2}t + \lambda \arctan(t) + \mu$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
3. (a) g verifie l'équation (2) si et seulement si
   $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^4} + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^3} + \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{y}{x^3}$$
   en multipliant par x^2, on obtient
   $$\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^2} + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x} + \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$$
   et si on pose $t = \frac{y}{x}$, on obtient alors $(1+t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = t$. Donc φ verifie l'equation différentielle (1).
   (b) Daprès ce qui est précede $\varphi(t) = \frac{1}{2}t + c\arctan(t)$ et par conséquent $g(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{2x} + c\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
   (c) On peut vérifier facilement que les fonctions de type $(x,y) \longmapsto \frac{y}{2x} + c\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ où $c \in \mathbb{R}$ sont des solutions de (2). La solution générale de (2) est donc :
   $$(x,y) \longmapsto \frac{y}{2x} + c\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

PROBLÈME

1ère Partie

Approximation par les polynômes de Lebesque

A. Une relation entre coefficients binomiaux

1. Pour choisir une partie à n éléments de $E \cup F$, il y a C_{2m}^n possibilités, d'autre part on peut former une partie à n éléments, en choisissant p éléments de E (p entier fixé entre 0 et m) et on complète par $n-p$ éléments de l'ensemble F. Ceci se traduit par l'égalité entre les cardinaux :

$$\sum_{p=0}^{n} C_m^p C_m^{n-p} = C_{2m}^n$$

2. (a) Pour tout α réel et tout entier naturel k, $\alpha \longmapsto C_\alpha^k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$ est une application polynomiale de degré n, et par conséquent l'application $\alpha \longmapsto C_{2\alpha}^n - \sum\limits_{p=0}^{n} C_\alpha^p C_\alpha^{n-p}$ est de degré inféreieure ou égal à n, et d'après la question précdente elle s'annule pour tout entier $m \geq n$.

   (b) L'application $\alpha \longmapsto C_{2\alpha}^n - \sum\limits_{p=0}^{n} C_\alpha^p C_\alpha^{n-p}$ étant non nulle et admettant une infinité de zéros, donc elle est nulle, c'est-à-dire , pour tout α réel, on a :

$$\sum_{p=0}^{n} C_\alpha^p C_\alpha^{n-p} = C_{2\alpha}^n$$

B. Recherche d'un équivalent

1. Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ est absolument convergente donc converge et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $1 + w_n > 0$.
D'autre part, si $n \geq n_0$

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln(1 + w_n) \sim w_n$$

et encore

$$|\ln a_{n+1} - \ln a_n| \sim |w_n|$$

donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\ln a_{n+1} - \ln a_n)$, converge absolument, donc converge et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = l$ existe, ce qui montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $e^l > 0$.

2. (a) Soit $u_n = \ln[(n+1)^\gamma b_{n+1}] - \ln[n^\gamma b_n]$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^\gamma + \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} \\ &= \gamma \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\gamma}{n} + w'_n\right) \\ &= \frac{\gamma}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\gamma}{n} + w'_n = w''_n \end{aligned}$$

où la suite $(w''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et par conséquent la suite $(\ln(n^\gamma b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la suite $(n^\gamma b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l > 0$.

(b) D'après la question précédente, et comme $b_n \sim \dfrac{l}{n^\gamma}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge si et seulement si $\gamma > 1$.

3. (a) Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = -\dfrac{\frac{1}{2-n}}{n+1} = \dfrac{2n-1}{2(n+1)}$.

(b) On a $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n-1}{2(n+1)} = 1 - \dfrac{3}{2n}(1-\dfrac{1}{n})^{-1} = 1 - \dfrac{3}{2n} + O(\dfrac{1}{n^2})$, donc d'après la question 2. de cette partie, il existe $C > 0$ telle que $c_n \sim \dfrac{C}{n^{3/2}}$ ou encore $\mathtt{C}_n^{1/2} \sim C\frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$

C. Résultat d'approximation

1. Soit R le rayon de convergence de cette série. On a $|(-1)^n\mathtt{C}_n^{1/2}| \sim C\frac{1}{n^{3/2}}$ et comme le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{C}_n^{1/2}(-1)^n z^n$ égal à 1, alors $R = 1$.
2. On a, pour tout $|z| \leq 1$ et tout entier naturel n non nul, $|\mathtt{C}_n^{1/2}(-1)^n z^n| \leq \mathtt{C}_n^{1/2}$ et la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{C}_n^{1/2}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{C}_n^{1/2}(-1)^n z^n$ converge normalement sur le disque fermé de $\mathbb{C}$, de centre O et de rayon 1.
3. Le produit de Cauchy la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{C}_n^{1/2}(-1)^n z^n$, par elle même, donne la série entière de coéfficient :
$$a_n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathtt{C}_p^{1/2}(-1)^{n-p}\mathtt{C}_{n-p}^{1/2} = (-1)^n\mathtt{C}_n^1,$$
donc $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. Donc $f(z)^2 = 1 - z$, pour $|z| \leq 1$.
4. On a pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x)^2 = 1 - x$, donc $f(x)^2$ est non nulle sur $]-1,1[$ et par conséquent f ne s'annulle pas sur $]-1,1[$. f étant continue sur $]-1,1[$ et même sur $[-1,1]$ (la convergence est uniforme sur $[-1,1]$), donc f garde le signe de $f(0) = 1$, donc $f(x) > 0$ sur $]-1,1[$ et par suite $f(x) = \sqrt{1-x}$ sur $]-1,1[$ et comme f est continue sur $[-1,1]$, alors $f(x) = \sqrt{1-x}$ pour tout $x \in [-1,1]$.
5. (a) On a
$$\begin{aligned}\mathtt{C}_n^{1/2} &= \frac{1/2(1/2-1)...(1/2-n+1)}{n!}\\ &= \frac{(1-2)(1-4)...(1-2(n-1))}{n!}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)2^n(n!)^2}\\ &= (-1)^{n-1}\mathtt{C}_{2n}^n\frac{1}{(2n-1)2^n}\end{aligned}$$

(b) Si $x \in [-1,1]$, alors $1 - x^2 \in [-1,1]$ et $f(1-x^2) = \sqrt{1-(1-x^2)} = |x|$.
La suite de fonctions polynomiales $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$L_n(x) = -\sum_{k=0}^{n}\mathtt{C}_k^{1/2}(-1)^{k-1}(1-x^2)^k,$$

n'est autre la suite de somme partielle associée à la série de fonctions

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{C}_n^{1/2}(-1)^n(1-x^2)^n,$$

et d'après la question 4., cette suite converge uniformément vers $f(1-x^2) = |x|$.

2ème Partie

Approximation par d'autres suites de polynômes plus simples

A. Intégrales de Wallis

1. (a) La fonction $t \longmapsto \cos^n t$ étant continue positive et non nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc son intégrale sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est strictement positive.
   Il est clair que $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

   (b) Une intégration par parties donne :

$$I_n = [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

   (c) En multipliant par I_{n-1} on obtient :

$$nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$$

   c'est-à-dire la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante, donc $nI_nI_{n-1} = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. (a) Si $p \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos^{p+1} t \leq \cos^p t$ et donc $I_{p+1} \leq I_p$. D'autre part, d'après la question 1. (b) de cette partie, $nI_n = (n-1)I_{n-2} \geq (n-1)I_{n-1}$, donc $\dfrac{n-1}{n} \leq \dfrac{I_n}{I_{n-1}}$.

   (b) D'après ce qui est précéde, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1$, donc $I_n \sim I_{n-1}$ et par suite de la relation $I_nI_{n-1} = I_1I_0 = \dfrac{\pi}{2n}$, on déduit que $I_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et comme $I_n > 0$, alors $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

B. Étude d'une suite de fonctions

1. Soit $n \geq 1$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.

2. (a) Grâce au changement de variable $t = \sin x$, on obtient :

$$\int_0^1 (1-t^2)^p dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t \cos t dt = I_{2p+1}.$$

   (b) Pour tout $t \neq 0$, on a $\dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2} = \sum\limits_{p=0}^{n-1}(1-t^2)^p$, donc :

$$v_n(1) = \int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2} dt = \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^p = \sum_{p=0}^{n-1} I_{2p+1}.$$

(c) On sait que $I_{2p+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p+2}}$ et la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} \sqrt{\frac{\pi}{4p+2}}$ diverge, donc d'après le théorème de comparaison, les sommes partielles associées sont équivalentes, c'est-à-dire

$$v_n(1) \sim \sum_{p=0}^{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{4p+2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

On a $\frac{1}{2}\int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[\sqrt{t}\right]_0^n$, donc $v_n(1) \sim \sqrt{n\pi}$.

3. (a) On sait que $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)}$ et en écrivant successivement ces relatiosn, on obtient :

$$I_{2n} = \frac{1.2.3...(2n-1)}{2.4...(2n)} \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\frac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi} I_{2n}.$$

(b) Comme $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, alors $\frac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi} I_{2n} \sim \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

(c) D'après la question 5. (a) de la partie 1, on a $(-1)^{n-1}\complement_{1/2}^n = \complement_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}(2n-1)}$, et donc

$$(-1)^{n-1}\complement_{1/2}^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$$

et par conséquent $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

(d) On a $u_n(1) = \complement_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}} v_n(1) \sim 1$, donc $\lim_{n\to\infty} u_n(1) = 1$.

4. (a) Pour tout x et y de $[a,1]$, on peut écrire :

$$|u_n(x) - u_n(y)| = \frac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}} \left| \int_x^y \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2} dt \right| \leq \frac{\complement_{2n}^n}{a^2 2^{2n}} |x-y|$$

Ainsi u_n est k_n-lipschitzienne sur $[a,1]$.

(b) Soit $x \in [a,1]$. On a :

$$\begin{aligned} |u_n(x) - 1| &\leq |u_n(x) - u_n(1)| + |u_n(1) - 1| \\ &\leq k_n|x-1| + |u_n(1) - 1| \\ &\leq \frac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}} \frac{|a-1|}{a^2} + |u_n(1) - 1| \end{aligned}$$

et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 et $\frac{\complement_{2n}^n}{2^n}$ tend vers 0, alors

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,1]} |u_n(x) - 1| = 0$$

Donc la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 1 sur $[a,1]$.

5. (a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-(1-t^2)}{t^2}$ étant positive sur $[0,1]$, donc si $0 \le x < y \le 1$, alors $\displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)}{t^2}dt \le \int_0^y \frac{1-(1-t^2)}{t^2}$, donc v_n est croissante sur $[0,1]$ et comme $u_n = \dfrac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}} v_n$, alors u_n est aussi croissante sur $[0,1]$.

   (b) Puisque u_n est croissante, alors $\forall x \in [0,1]$, $0 \le u_n(x) \le u_n(1)$, d'autre part $(u_n(1))_{n\ge 1}$ est convergente donc bornée par une constante $M > 0$ et donc
$$0 \le u_n(x) \le M.$$

C. D'autres suites de polynômes approchant uniformément la valeur absolue sur $[-1,1]$

1. Si $t \ne 0$, on a $\dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2} = \dfrac{1 - \sum_{k=0}^n \complement_n^k(-t^2)^k}{t^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \complement_n^k(-1)^{k-1}(t^2)^{k-1}$, d'où, pour $x \in [0,1]$:
$$v_n(x) = \int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}dt = \sum_{k=1}^n \complement_n^k(-1)^{k-1}\int_0^x (t^2)^{k-1} = \sum_{k=1}^n \complement_n^k(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$
et par suite
$$xu_n(x) = \frac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}} xv_n(x) = \frac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}}\sum_{k=1}^n \complement_n^k(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k} = P_n(x).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $|P_n(x) - x| = |x(u_n(x)-1)| \le x(M+1)$, donc il existe $a > 0$ tel que $0 \le x \le a$ implique $x(M+1) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Sur $[a,1]$, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 1, et par conséquent la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $x \longmapsto x$ sur $[a,1]$, grâce à l'inégalite :
$$|P_n(x) - x| \le |u_n(x) - 1|.$$
Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge n_0$ implique, pour tout $x \in [a,1]$, $|P_n(x) - x| \le \frac{\varepsilon}{2}$ Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|P_n(x) - x| = 0$$
Si $x \in [-1,0]$, alors $P_n(x) + x = P_n(-x) - (-x)$ et par conséquent
$$\sup_{x\in[-1,0]}|P_n(x)+x| = \sup_{t\in[0,1]}|P_n(t) - t|,$$
ce qui permet de dire que la convergence est uniforme sur $[-1,1]$ de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la valeur absolue.

3. On a, pour tout x de $[-1,1]$:
$$|Q_n(x) - |x|| \le |Q_n(x) - P_n(x)| + |P_n(x) - |x||$$
Il suffit donc de montrer que la suite $(Q_n - P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0. Or
$$Q_n(x) - P_n(x) = \frac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}x^{2k} = \frac{\complement_{2n}^n}{2^{2n}}[(1-x^2)^n - 1]$$

et donc

$$|Q_n(x) - P_n(x)| \leq 2\frac{\mathtt{C}_{2n}^n}{2^{2n}}$$

ce qui permet de conclure.

4. Il suffit de remarquer que $\widetilde{P}_n(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{\frac{\mathtt{C}_{2n}^n}{2^{2n}}} P_n(x)$, que $\widetilde{Q}_n(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{\frac{\mathtt{C}_{2n}^n}{2^{2n}}} Q_n(x)$ et que $\frac{\mathtt{C}_{2n}^n}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

●●●●●●●●●●●●

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr